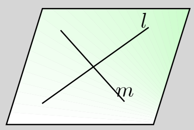
1. 직선과 평면의 위치 관계

(1) 평면의 결정조건 : 두 점을 지나는 평면은 무수히 많으나, 다음과 같은 경우에는 평면이 하나로 결정된다.

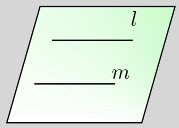
① 같은 직선 위에 있지 않은 세 점
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
③ 서로 만나는 두 직선
④ 평행한 두 직선

(2) 두 직선의 위치 관계

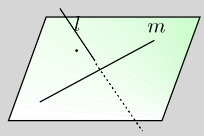
① 만난다



② 평행하다

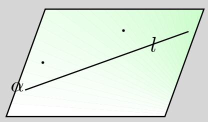


③ 꼬인 위치

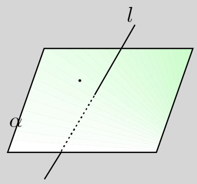


(3) 직선과 평면의 위치 관계

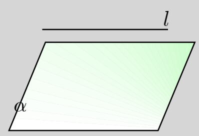
① 포함된다



② 만난다

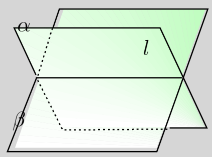


③ 평행하다

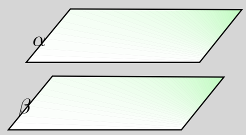


(4) 두 평면의 위치관계

① 만난다 (교선 l)



② 평행하다$(\alpha /\!/ \beta)$

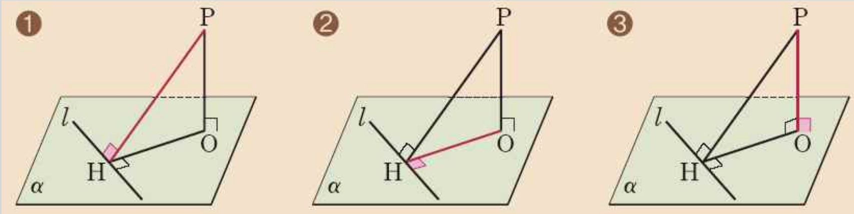


2. 삼수선의 정리

→ 평면 α 위에 있지 않은 점 P, α위의 점 O를 지나지 않는 α위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$ 이면 $\overline{PH}\perp l$
(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$ 이면 $\overline{OH}\perp l$
(3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$ 이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

수밤새 (63)



3. 정사영

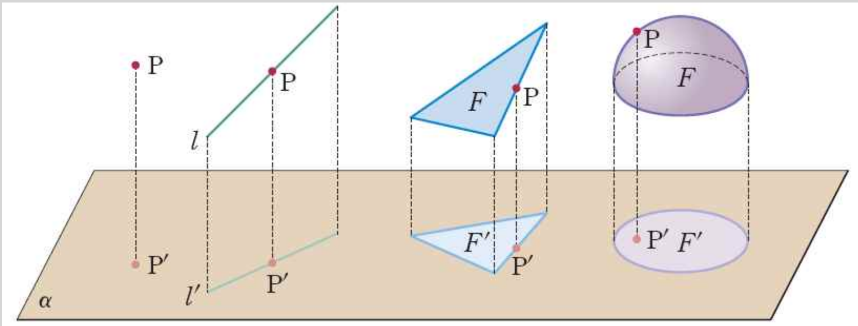
→ 평면 α위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P'을 점 P의 평면 α위로의 정사영이라고 한다. 또, 도형 F에 속하는 한 점의 평면 α위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α위로의 정사영이라고 한다.

(1) 선분 AB의 평면 α위로의 정사영을 선분 $A'B'$이라 하고, 직선 AB가 평면 α와 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

(2) 평면 α위의 도형 F의 평면 β위로의 정사영을 F'이라 하고, F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$S' = S\cos\theta$$



4. 공간좌표

(1) 점에 대한 이동 : 점 $P(a,\ b,\ c)$ 에 대하여

① 축에 내린 수선의 발 : x 축 $(a,\ 0,\ 0)$, y 축 $(0,\ b,\ 0)$, z 축 $(0,\ 0,\ z)$
② 평면에 내린 수선의 발 : xy 평면 $(a,\ b,\ 0)$, yz 평면 $(0,\ b,\ c)$,
zx 평면 $(a,\ 0,\ c)$

(2) 점의 좌표 : 두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 에 대하여

① 두 점 A, B 사이의 거리 : $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

② $m : n$ 으로 내분하는 점 : $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n},\ \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

③ $m : n$ 으로 외분하는 점 : $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \dfrac{my_2-ny_1}{m-n},\ \dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

5. 구의 방정식

(1) 구의 정의 : 공간에서 정점 C에서 일정한 거리에 있는 점의 자취
(2) 구의 방정식 : 점 $C(a,\ b,\ c)$ 가 중심, 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

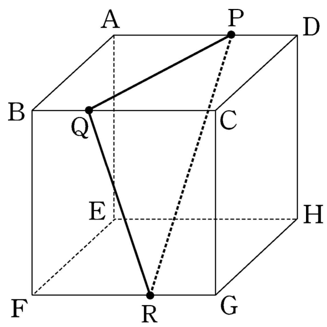
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

(3) 구의 방정식의 일반형 : $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

① 중심의 좌표 : $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ ② 반지름 : $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$

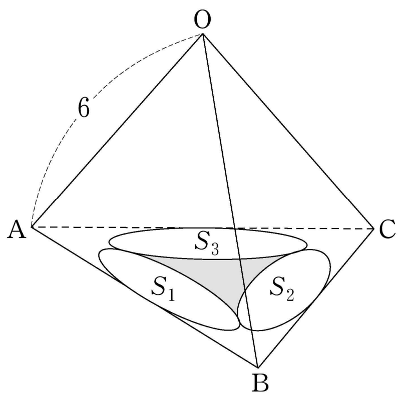
Problem 50

아래 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3 인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 의 세 모서리 $AD,\ BC,\ FG$ 위에 $\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{GR}=1$ 인 세 점 $P,\ Q,\ R$ 이 있다. 평면 PQR 와 평면 $CGHD$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은 ? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



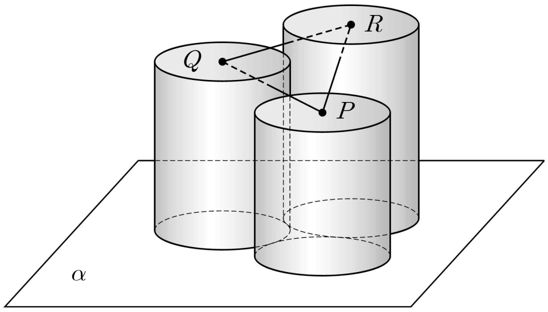
Problem 51

한 변의 길이가 6인 정사면체 $OABC$가 있다. 세 삼각형 $\triangle OAB,\ \triangle OBC,\ \triangle OCA$ 에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 $S_1,\ S_2,\ S_3$이라 하자. 그림과 같이 세 도형 $S_1,\ S_2,\ S_3$으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오.



Problem 52

그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)



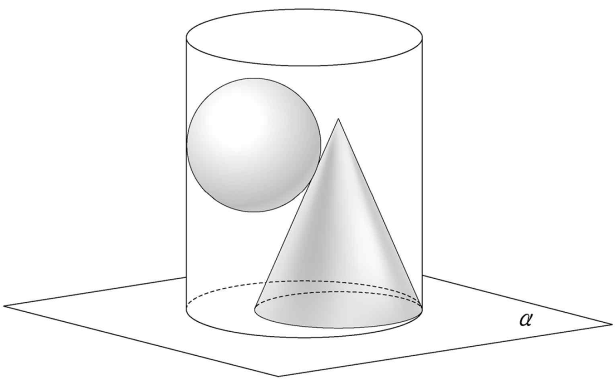
Problem 53

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

< 보 기 >

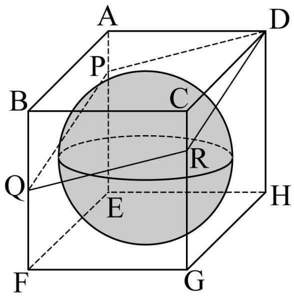
ㄱ. 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
ㄴ. 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B'일 때, $\angle A'OB'=180°$ 이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A'은 일치한다.)



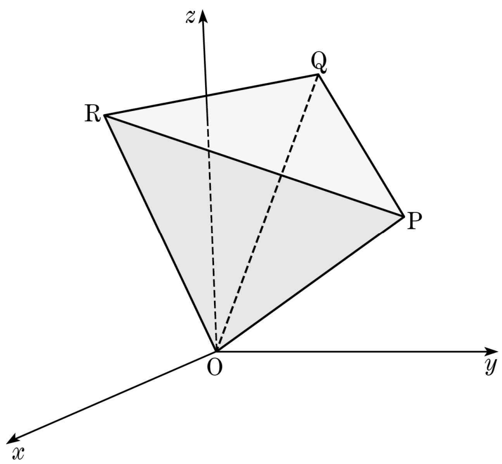
Problem 54

그림과 같이 한 변의 길이가 12 인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에 내접하는 구가 있다. 변 AE , CG 를 $1:3$ 으로 내분하는 점을 각각 P , R 라 하고 변 BF 의 중점을 Q 라 한다. 네 점 D , P , Q , R 를 지나는 평면으로 내접하는 구를 자를 때 생기는 원의 넓이는 ?



Problem 55

그림과 같이 좌표공간에서 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 $OPQR$의 한 면 PQR가 z축과 만난다. 면 PQR의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S의 최솟값은 k이다. $160k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



Problem 56

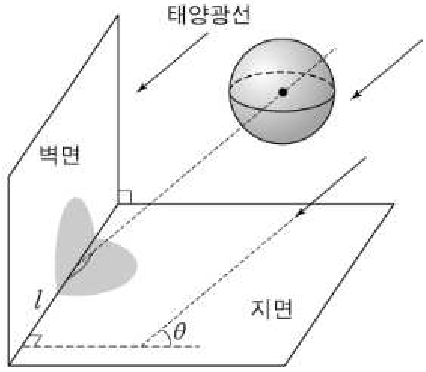
그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르면 ?

< 보 기 >

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다.

ㄴ. $\theta = 60°$ 이면 $a < b$ 이다.

ㄷ. $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{r^2}$

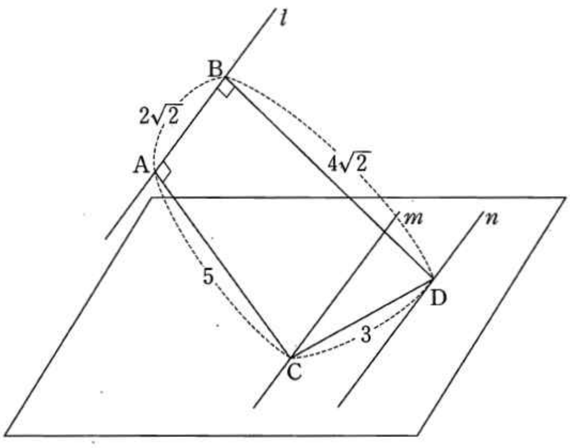


수밤새 (73)

Problem 57

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 3$
(나) $\overline{AC} \perp l$, $\overline{AC} = 5$
(다) $\overline{BD} \perp l$, $\overline{BD} = 4\sqrt{2}$



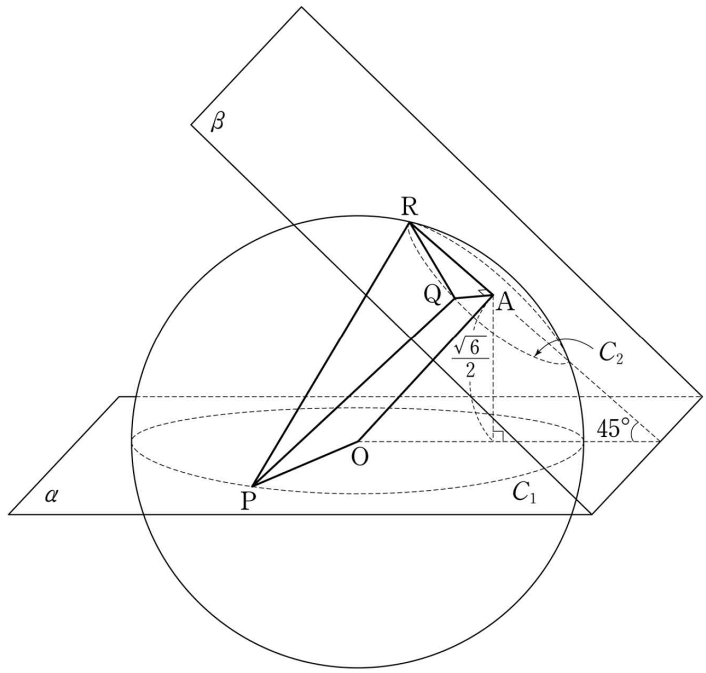
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$ 의 값을 구하시오. $\left(\text{단}, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Problem 58

반지름의 길이가 2 인 구의 중심 O 를 지나는 평면을 α 라 하고, 평면 α 와 이루는 각이 45° 인 평면을 β 라 하자. 평면 α 와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β 와 구가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심 A 와 평면 α 사이의 거리가 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R 를 잡는다.

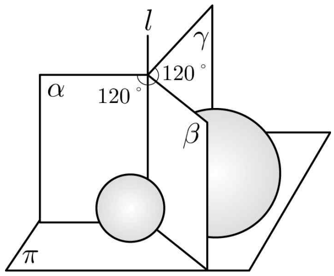
> (가) $\angle QAR = 90^\circ$
> (나) 직선 OP 와 직선 AQ 는 서로 평행이다.

평면 PQR 와 평면 $AQPO$ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



Problrm 59

평면 π에 수직인 직선 l을 경계로 하는 세 반평면 α, β, γ가 있다. α, β가 이루는 각의 크기와 β, γ가 이루는 각의 크기는 모두 120° 이다. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구가 π, α, β에 동시에 접하고, 반지름의 길이가 2인 구가 π, β, γ에 동시에 접한다.



두 구의 중심 사이의 거리를 d 라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오. (단, 두 구는 평면 π의 같은 쪽에 있다.)

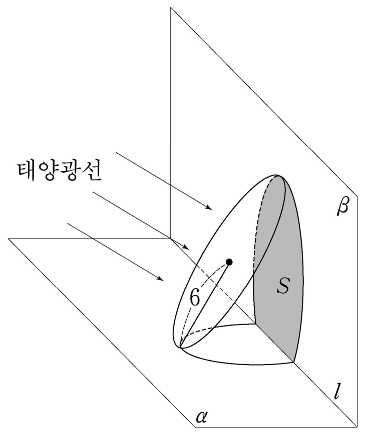
Problem 60

좌표공간에서 점 $P\ (-3,4,5)$ 를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

수밤새 (79)

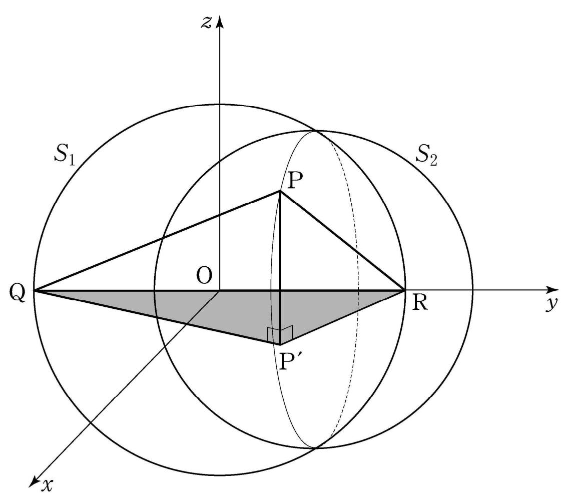
Problem 61

서로 수직인 두 평면 $\alpha,\ \beta$의 교선을 l이라 하자. 반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 $\alpha,\ \beta$와 각각 한 점에서 만나고 교선 l에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α와 $30°$의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S라 하자. S의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.)



Problem 62

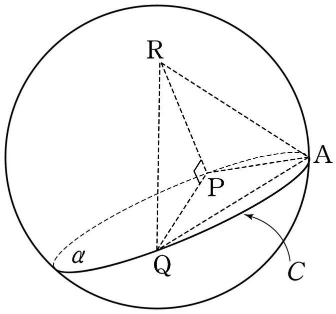
두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$ 을 각각 $S_1,\ S_2$라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy 평면 위로의 정사영을 P'이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 $PQP'R$의 부피의 최대값을 구하시오.



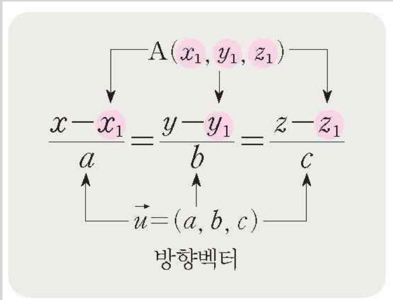
수밤새 (81)

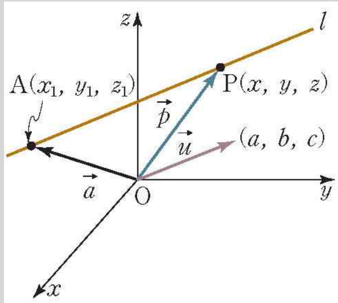
Problem 63

좌표공간에서 구 $S : x^2+y^2+z^2=4$ 와 평면 $\alpha : y-\sqrt{3}z=2$ 가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $A(0, 2, 0)$ 에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$ 가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s 라 할 때, s^2의 값을 구하시오.



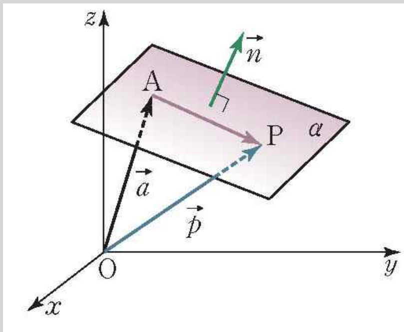
1. 공간에서의 직선의 방정식





2. 공간에서의 평면의 방정식

→ **점** $A(x_1, y_1, z_1)$**을 지나고 영벡터가 아닌 벡터** $\vec{n}=(a, b, c)$ **에 수직인 평면의 방정식** : $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$



Problem 64

좌표공간에서 삼각형 ABC**가 다음 조건을 만족시킨다.**

(가) 삼각형 ABC **의 넓이는** 6 **이다.**
(나) 삼각형 ABC **의** yz **평면 위로의 정사영의 넓이는** 3 **이다.**

삼각형 ABC **의 평면** $x-2y+2z=1$ **위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 ?**

Problem 65

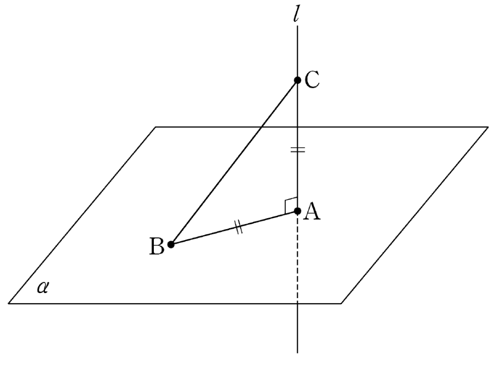
좌표공간에서 직선 $l:\dfrac{x}{2}=6-y=z-6$ 과 평면 α가 점 $P(2,5,7)$ 에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 $A(a,b,c)$ 와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은? (단, $a>0$)

Problem 66

좌표공간에서 중심이 $C(1,\ 2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 구가 두 평면 α, β와 접하는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 평면 α, β의 교선의 방정식이 $x=-y=z$ 일 때, 삼각형 CPQ의 넓이는 S이다. $100S$의 값을 구하시오.

Problem 67

좌표공간에서 직선 $l:x-1=\dfrac{y}{2}=1-z$ 와 평면 α 가 점 $A(1,\ 0,\ 1)$ 에서 수직으로 만난다. 평면 α 위의 점 $B(-1,\ a,\ a)$ 와 직선 l 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 점 C에서 원점까지의 거리는 d 이다. d^2 의 값을 구하시오.



수밤새 (87)

Problem 68

좌표공간에서 중심이 C인 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ 와 평면 $x+y+z=6$ 이 만나서 생기는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CQ}$의 내적 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}$의 최소값은 ?

Problem 69

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ 3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$ 의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

수밤새 (89)

Problem 70

좌표공간에 두 점 $A(3,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ -3,\ -1)$ 이 있다. 평면 $x-y+z=0$ 위에 있는 점 P에 대하여 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 의 최소값은 ?

Problem 71

좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi \quad (k=1,\ 2,\ 3\ )$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.