2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'가'형 정답

1	③	2	③	3	⑤	4	④	5	②
6	③	7	①	8	②	9	⑤	10	③
11	②	12	⑤	13	④	14	①	15	④
16	①	17	④	18	①	19	②	20	⑤
21	④	22	12	23	11	24	27	25	9
26	546	27	64	28	5	29	51	30	36

해 설

1. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2}$$
$$=21$$

2. [출제의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$f(x)=x+2\sin x$에서

$f'(x)=1+2\cos x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+2\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}$$
$$=2$$

3. [출제의도] 무리수 e의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$
$$=e^2$$

4. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 함숫값을 계산한다.

$\tan^2\theta=(-3)^2=9$이고

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$\sec^2\theta=1+9$$
$$=10$$

5. [출제의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1+1$$
$$=2$$

6. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

백의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 4이고, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$이므로

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4\times25=100$

7. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$이고,

$x=1$일 때 $t=0$이고,

$x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-0)$$
$$=\sqrt{3}$$

8. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$a>0$에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$이므로

$1-2^{-\frac{2}{a}}>0$이다.

$$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)}$$
$$=\frac{1-\left(2^{-\frac{2}{a}}\right)^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$
$$=\frac{\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)\left(1+2^{-\frac{2}{a}}\right)}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$
$$=1+2^{-\frac{2}{a}}$$

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서

$$1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$$
$$2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

$-\frac{2}{a}=-1$에서

$a=2$

[다른 풀이]

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서 $2Q(4)=3Q(2)$

$$2Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)=3Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)$$

$2^{-\frac{2}{a}}=t$로 놓으면 $a>0$이므로 $0<t<1$이다.

$2(1-t^2)=3(1-t)$

$2(1-t)(1+t)=3(1-t)$

$2(1+t)=3$

$t=\frac{1}{2}$

즉 $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$

$-\frac{2}{a}=-1$에서

$a=2$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$f(0)=2^0+1=2$, $g(0)=-2^{-1}+7=\frac{13}{2}$이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각

A$(0,\ 2)$, B$\left(0,\ \frac{13}{2}\right)$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{13}{2}-2=\frac{9}{2}$

두 식 $y=2^x+1$, $y=-2^{x-1}+7$을 연립하여 풀면

$2^x+1=-2^{x-1}+7$

$\frac{3}{2}\times2^x=6$

$2^x=4$

$x=2$

$f(2)=2^2+1=5$이므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

10. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값의 합을 구한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$f(2)+f(0)=\frac{2-1}{2^2-2+1}+\frac{0-1}{0^2-0+1}$$
$$=\frac{1}{3}+(-1)$$
$$=-\frac{2}{3}$$

11. [출제의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$에서

(i) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$에서

$a^2=\frac{9}{4}$

$a=\pm\frac{3}{2}$

$0<a<3$이므로

$a=\frac{3}{2}$

(ii) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 4가 아니다.

(iii) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

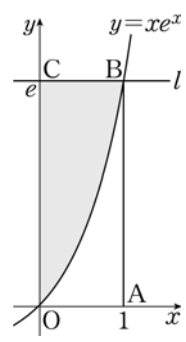
$$f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}$$
$$=\frac{a}{3}$$
$$=4\text{에서}$$

$a=12$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times12=18$

12. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



4개의 점 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(1,\ e)$, C$(0,\ e)$를 꼭짓점

으로 하는 직사각형의 넓이는

$1\times e=e$

이고, 곡선 $y=xe^x$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$

$=e-(e-1)$

$=1$이므로

구하는 도형의 넓이는 $e-1$이다.

13. **[출제의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 y절편을 구한다.**

$f(x)=0$에서

$\ln(\tan x)=0$

$\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{4}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이다.

$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}$

$=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\sqrt{2})^2}{1}$

$=2$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$y=2x-\frac{\pi}{2}$이므로

이 접선의 y절편은 $-\frac{\pi}{2}$이다.

14. **[출제의도] 적분을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

$\frac{d}{dt}\ln|T(t)-20|=\frac{T'(t)}{T(t)-20}$ 이므로

$\ln|T(t)-20|=kt+C$가 성립한다.

$t=0$일 때, $\ln|T(0)-20|=C$에서

$C=\ln 80$ …… ㉠

$t=3$일 때, $\ln|T(3)-20|=3k+C$에서

$3k+C=\ln 40$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3k=\ln 40-\ln 80$

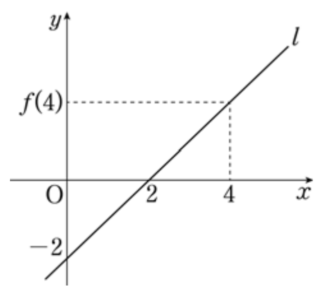
$=\ln\frac{1}{2}$

$=-\ln 2$

$k=-\frac{\ln 2}{3}$

15. **[출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.**

조건 (가)에서 직선 l이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 l의 x절편과 y절편은 각각 2, -2이다.



함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선 l은 기울기가 1이고, 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y=x-2$이다.

따라서 $f(4)=2$, $f'(4)=1$이다.

$g(x)=xf(2x)$에서

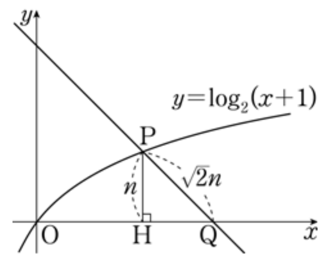
$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$g'(2)=f(4)+4f'(4)$

$=2+4$

$=6$

16. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.**



점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{HQ}}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}n$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=n$, 즉 $b=n$이다.

점 $\mathrm{P}(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=n$이므로

$x_n=a+n$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n,\ 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\frac{0-b}{x_n-a}=-1$에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}$

$=\sqrt{b^2+b^2}$

$=\sqrt{2}b$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}n$에서 $b=n$이다.

점 $\mathrm{P}(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$에서

$a=2^n-1$

$x_n=a+b$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

17. **[출제의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 구한다.**

$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

조건 (나)에서 $g'(f(x))\neq0$이고

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$이므로

$f(x)g'(f(x))=\frac{f(x)}{f'(x)}$

$=\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$

양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

$|f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

조건 (가)에서 $f(0)=1>0$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

$f(0)=1$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$이므로

$f(3)=e^{12}$

18. **[출제의도] 이항정리를 이용하여 부등식의 해결 과정을 완성한다.**

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는 $\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ 이다.

$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는

$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k\times{}_n\mathrm{C}_{n-k})=\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2$이므로

$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$이 성립한다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}+\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_n\mathrm{C}_{n-k})^2\}$

$=\{({}_n\mathrm{C}_1)^2+2\times({}_n\mathrm{C}_2)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$

$\quad+\{({}_n\mathrm{C}_{n-1})^2+2\times({}_n\mathrm{C}_{n-2})^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2\}$

$=\{({}_n\mathrm{C}_1)^2+2\times({}_n\mathrm{C}_2)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$

$\quad+\{n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2+(n-1)\times({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_{n-1})^2\}$

$=n\times({}_n\mathrm{C}_0)^2+n\times({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+n\times({}_n\mathrm{C}_n)^2$

$=\boxed{n}\times\{({}_n\mathrm{C}_0)^2+({}_n\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_n\mathrm{C}_n)^2\}$

$=\boxed{n}\times\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$

이다. 한편

$\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_n\mathrm{C}_k)^2\}\ge10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$

$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_n\ge10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$

$n\times\frac{(2n)!}{n!\times n!}\ge10\times\frac{(2n)!}{(n+1)!\times(n-1)!}$

$n\times\frac{1}{n}\ge10\times\frac{1}{n+1}$

$n+1\ge10$

$n\ge9$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{9}$ 이다.

$f(n)={}_{2n}\mathrm{C}_n$, $g(n)=n$, $p=9$이므로

$f(3)+g(3)+p={}_6\mathrm{C}_3+3+9$

$=20+3+9$

$=32$

19. **[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.**

$\angle\mathrm{BPA}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{QBR}=\alpha$라 하면

$3\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sin\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta\tan2\alpha$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PR}}$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta(\tan2\alpha-\tan\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$
$=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 성질을 추론한다.

ㄱ. $f(x)=\int_0^x\sin(\pi\cos t)dt$ 에서

$f'(x)=\sin(\pi\cos x)$

$f'(0)=\sin(\pi\cos0)$

$=\sin\pi$

$=0$ (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\int_0^{-x}\sin(\pi\cos t)dt$

$-t=y$로 놓으면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고

$t=0$일 때 $y=0$, $t=-x$일 때 $y=x$이므로

$f(-x)=-\int_0^x\sin\{\pi\cos(-y)\}dy$

$=-\int_0^x\sin(\pi\cos y)dy$

$=-f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi-t=y$라 하면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고,

$t=0$일 때 $y=\pi$, $t=\pi$일 때 $y=0$이므로

$f(\pi)=\int_0^\pi\sin(\pi\cos t)dt$

$=-\int_\pi^0\sin\{\pi\cos(\pi-y)\}dy$

$=-\int_\pi^0\sin(-\pi\cos y)dy$

$=\int_\pi^0\sin(\pi\cos y)dy$

$=-\int_0^\pi\sin(\pi\cos y)dy$

$=-f(\pi)$

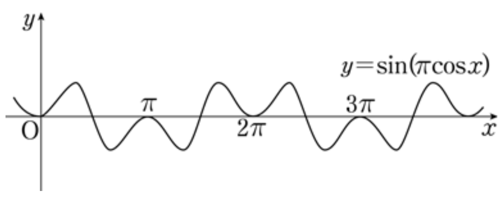
$2f(\pi)=0$이므로

$f(\pi)=0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

함수 $y=\sin(\pi\cos x)$의 그래프는 그림과 같다.



21. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$f(1)=(1+a+b)e$

$=e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e$

$=e$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2$, $b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서

$f'(x)=x^2e^x$

$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$f''(1)=3e$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로

함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}$

$=\frac{1}{e}$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$g'(e)\times e=3e$

$g'(e)=3$

따라서

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$

$=\frac{1}{e}\times e+1\times3$

$=4$

22. [출제의도] 로그부등식의 해를 구한다.

진수의 조건에 의하여

$x-2>0$, $x>2$ …… ㉠

$\log_2(x-2)<2$에서 로그의 정의에 의하여

$x-2<2^2$, $x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<x<6$이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는

3, 4, 5이므로 그 합은

$3+4+5=12$

23. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{4+(-2)}{1-4\times(-2)}$

$=\frac{2}{9}$

$p=9$, $q=2$이므로

$p+q=11$

24. [출제의도] 자연수의 분할의 수와 집합의 분할의 수를 구한다.

$5=1+1+3=1+2+2$

이므로 $P(5,3)=2$이다.

한편, 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 서로 다른 3개의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수는 각각 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.

(ⅰ) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우
5개의 원소 중 3개를 선택하여 원소의 개수가 3인 부분집합을 만들고, 나머지 2개의 원소로 각각 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는

$_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(ⅱ) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우
5개의 원소 중 1개를 선택하여 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들고, 나머지 4개의 원소 중 2개의 원소를 선택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들면 나머지 2개의 원소로 이루어진 부분집합이 정해진다. 이때 각 경우가 2가지씩 중복되므로 구하는 경우의 수는

$_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2}=5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}$

$=15$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$S(5,3)=10+15=25$

따라서

$P(5,3)+S(5,3)=2+25=27$

25. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$\sin^2x=1-\cos^2x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로

$f(x)=\sin^2x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=1-\cos^2x+\cos x+1$

$=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

이때 $-1\le\cos x\le1$ 이므로

함수 $f(x)$는 $\cos x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 $M=\frac{9}{4}$이므로

$4M=9$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

선택한 7개의 문자 중 A, B, C의 개수를 차례로 a, b, c라 하면 세 수 a, b, c는 모두 홀수이고 그 합이 7이어야 하므로 다음 경우가 나온다.

(ⅰ) $(a, b, c)=(1, 1, 5)$인 경우
7개의 문자 A, B, C, C, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 1개, 5개 있는 순열의 수와 같으므로

$\frac{7!}{5!}=7\times6=42$

$(a, b, c)=(1, 5, 1)$, $(5, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 42이다.

(ⅱ) $(a, b, c)=(1, 3, 3)$인 경우
7개의 문자 A, B, B, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 3개, 3개 있는 순열의 수와 같으므로

$\frac{7!}{3!\times3!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(3\times2\times1)}$

$=140$

$(a, b, c)=(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$인 경우의 수도 모두 140이다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times42+3\times140=546$

27. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$x\int_0^xf(t)dt-\int_0^xtf(t)dt=ae^{2x}-4x+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^xf(t)dt+xf(x)-xf(x)=2ae^{2x}-4$

즉 $\int_0^xf(t)dt=2ae^{2x}-4$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=2a-4$, 즉 $a=2$

이므로 ㉡에서 $b=-2$이다.

$\int_0^xf(t)dt=4e^{2x}-4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=8e^{2x}$이므로

$f(a)f(b)=f(2)f(-2)$
$=(8e^{4})\times(8e^{-4})$
$=64e^{4-4}$
$=64$

28. [출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k=1+\frac{k}{n}$로 놓으면 $\Delta x=\frac{1}{n}$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2(x-1)f(x)dx$$

이다. 따라서

$$\int_1^2(x-1)\ln x\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$$
$$=(0-0)-\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^2$$
$$=-(1-2)+\left(\frac{1}{4}-1\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

$p=4$, $q=1$이므로
$p+q=5$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하자.

(ⅰ) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$인 경우
배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{H}_2$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2-2={}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2-2$
$=3\times3-2$
$=7$
$(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ⅱ) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$인 경우
사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_2-2={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2-2$
$=2\times2\times3-2$
$=10$
$(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$3\times7+3\times10=51$

[다른 풀이]

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.
이때 과일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.

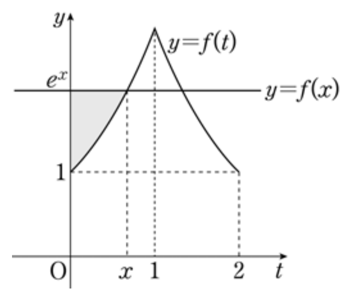
(ⅰ) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$인 경우
학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면
$(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$
이므로 구하는 경우의 수는 7이다.
이때 $(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ⅱ) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$인 경우
학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면
$(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$
이므로 구하는 경우의 수는 10이다.
이때 $(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$3\times7+3\times10=51$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.

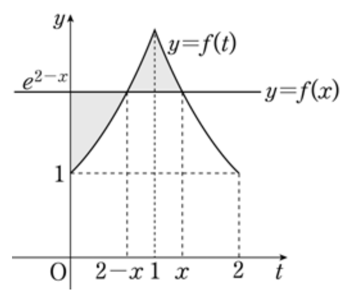
(ⅰ) $0<x\le1$일 때,



그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$$g(x)=\int_0^x|f(x)-f(t)|dt$$
$$=\int_0^x\{f(x)-f(t)\}dt$$
$$=\int_0^x(e^x-e^t)dt$$
$$=\left[te^x-e^t\right]_0^x$$
$$=xe^x-e^x+1$$
$$=(x-1)e^x+1$$

(ⅱ) $1<x<2$일 때,



그림에서
$0<t<2-x$일 때, $f(x)\ge f(t)$
$2-x\le t<x$일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$$g(x)=\int_0^x|f(x)-f(t)|dt$$
$$=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$$

위의 (ⅰ)에 의하여

$$\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(2-x-1)e^{2-x}+1$$
$$=(1-x)e^{2-x}+1$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$$
$$=2\int_1^x\{f(t)-f(x)\}dt$$
$$=2\int_1^x(e^{2-t}-e^{2-x})dt$$
$$=2\left[-e^{2-t}-te^{2-x}\right]_1^x$$
$$=2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$
$$=2e-2xe^{2-x}$$

따라서

$$g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$$
$$=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1 & (0<x\le1)\\(1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1<x<2)\end{cases}$$ 이므로

$$g'(x)=\begin{cases}xe^x & (0<x<1)\\(3x-4)e^{2-x} & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

(극댓값)$=g(1)$
$=(1-1)e+1$
$=1$

(극솟값)$=g\left(\frac{4}{3}\right)$
$=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1$
$=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}$$
$$=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$$

$a=-2$, $b=3$이므로
$(ab)^2=36$